

① به ازای کدام مجموعه برای m ، در معادله درجه دوم $x^2 - 4x = m - mx$ مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی، ۱۶ برابر حاصل ضرب آنهاست؟

- (۱) $\{ \}$ (۲) $\{-2, -8\}$ (۳) $\{-2\}$ (۴) $\{-8\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم $x^2 + (m - 4)x - m = 0$

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، طبق فرض داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \Rightarrow S^2 - 2P = 16P$$

$$\Rightarrow S^2 = 18P \Rightarrow \left(-\frac{m-4}{1}\right)^2 = 18\left(\frac{-m}{1}\right)$$

$$\Rightarrow (m-4)^2 = -18m \Rightarrow m^2 - 8m + 16 = -18m$$

$$\Rightarrow m^2 + 10m + 16 = 0 \Rightarrow (m+8)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ m = -2 \end{cases}$$

در انتها، باید بررسی کنیم که به ازای این مقادیر به دست آمده، Δ منفی نشود:

$$m = -2 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$m = -8 \Rightarrow x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

② به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 - (m-1)x + 9 = 0$ فاقد ریشه حقیقی می‌باشد؟

- (۱) $(-7, 5)$ (۲) $(-6, 6)$ (۳) $(-5, 7)$ (۴) $(-7, 7)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

باید $\Delta < 0$ باشد: $(m-1)^2 - 36 < 0 \Rightarrow (m-1)^2 < 36$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |m-1| < 6 \Rightarrow -6 < m-1 < 6 \Rightarrow -5 < m < 7$$

۳) به ازای چند مقدار m ، بیشترین مقدار تابع $f(x) = mx^2 - (m+3)x + 5$ برابر یک است؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

بیشترین مقدار سهمی (یا همان ماکزیمم) عرض رأس سهمی است، پس باید عرض رأس را برابر ۱ قرار دهیم:

$$\begin{aligned}y &= mx^2 - (m+3)x + 5 \\ \frac{-\Delta}{4a} &= 1 \Rightarrow -\frac{(m+3)^2 - 4(m)(5)}{4m} = 1 \\ &\Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 20m = -4m \\ &\Rightarrow m^2 - 10m + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 9 \end{cases}\end{aligned}$$

با توجه به این که $m = 9$ و $m = 1$ هر دو مثبت‌اند و سهمی $y = mx^2 - (m+3)x + 5$ وقتی ماکزیمم دارد که ضریب x^2 منفی باشد، لذا $m < 0$ ، پس هیچ کدام از جواب‌های به‌دست آمده قابل قبول نیست.

۴) چند عدد حقیقی وجود دارد که اگر آن را با یک جمع کنیم، نتیجه برابر با دو برابر جذر آن عدد می‌شود؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

فرض کنید آن عدد x باشد، مسئله را به صورت معادله زیر می‌نویسیم:

$$x + 1 = 2\sqrt{x} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$$

اگر $\sqrt{x} = t$ باشد، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}t^2 - 2t + 1 &= 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1\end{aligned}$$

معادله فقط یک جواب دارد.

⑤ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x = x^2 - 4$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_1^3 + \frac{1}{x_2}$ و $x_2^3 + \frac{1}{x_1}$ کدام است؟

$$4x^2 + 51x = 221 \quad (2)$$

$$4x^2 + 51x = 197 \quad (4)$$

$$4x^2 = 51 + 221 \quad (1)$$

$$4x^2 = 51x + 197 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - x - 4 = 0$ هستند، بنابراین:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-(-1)}{1} = 1$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = -4$$

حال مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را به دست می‌آوریم:

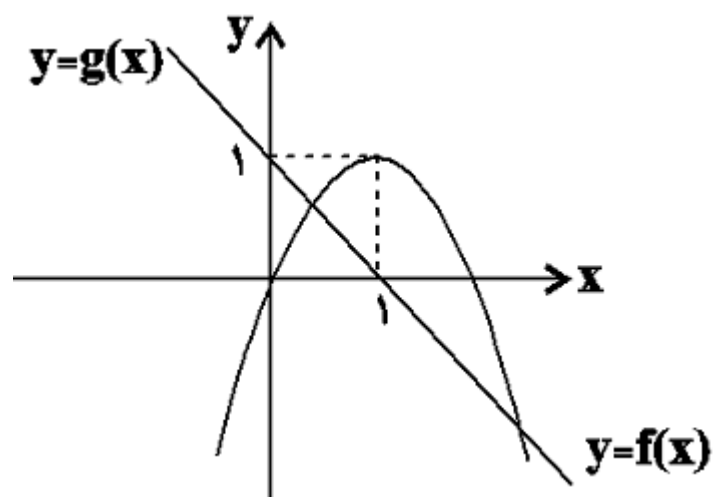
$$\begin{aligned} S' &= (x_1^3 + \frac{1}{x_2}) + (x_2^3 + \frac{1}{x_1}) = x_1^3 + x_2^3 + (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}) \\ &= (S^3 - 3PS) + (\frac{S}{P}) = (1)^3 - 3(-4)(1) + \frac{1}{-4} = \frac{51}{-4} \\ P' &= (x_1^3 + \frac{1}{x_2})(x_2^3 + \frac{1}{x_1}) = (x_1 x_2)^3 + (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{x_1 x_2} \\ &= P^3 + (S^2 - 2P) + \frac{1}{P} = (-4)^3 + (1^2 - 2(-4)) + \frac{1}{-4} \\ &= \frac{-221}{4} \end{aligned}$$

معادله مورد نظر برابر است با:

$$x^2 - S'x + P' = 0$$

$$x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 = 51x + 221$$

⑥ نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله $f(x) = g^2(x)$ ، کدام است؟



- (۱) -۲
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

رأس سهمی نقطه $(1, 1)$ است، پس می‌توان ضابطه آن را به صورت $f(x) = a(x - 1)^2 + 1$ در نظر گرفت. از طرفی نقطه $(0, 0)$ روی سهمی قرار دارد، بنابراین:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a(0 - 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x - 1)^2 + 1$$

خط هم از نقاط $(1, 0)$ و $(0, 1)$ عبور کرده، پس:

$$m = \frac{0-1}{1-0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = g^2(x) \Rightarrow -(x - 1)^2 + 1 = (-x + 1)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow[\text{رأس سهمی } ax^2+bx+c=0]{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

⑦ اگر مجموع ریشه‌های معادله $3x^2 - (k+1)x - 2 = 0$ برابر ۲ باشد، مینیمم تابع $f(x) = 2x^2 + 2x - k$ کدام است؟

- (۱) -۵
(۲) -۵/۵
(۳) -۶
(۴) -۶/۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$3x^2 - (k+1)x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه ها}} \frac{(k+1)}{3} = 2$$

$$\Rightarrow k+1 = 6 \Rightarrow k = 5$$

$$\xrightarrow{k=5} f(x) = 2x^2 + 2x - 5$$

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 = -5/5$$

⑧ اگر صفرهای یک تابع درجه دوم برابر ۱ و ۳ باشد و از نقطه $(2, 1)$ بگذرد، این تابع محورهای را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) ۳
(۲) -۳
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$f(x) = a(x-1)(x-3)$$

تابع از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد، پس: $f(2) = 1$

$$\Rightarrow 1 = a(2-1)(2-3) \Rightarrow 1 = -a \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -1(x-1)(x-3) = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{محل برخورد با محور y ها}} f(0) = -3$$

۹) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x - 2 = 0$ باشند، آنگاه حاصل عبارت $4\alpha^2 - 12\alpha + 2\beta^2$ کدام است؟

۷۰ (۴)

۸۰ (۳)

۷۲ (۲)

۸۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$x^2 - 6x - 2 = 0 \quad (\Delta > 0) \rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = 6 \\ P = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

عبارت $4\alpha^2 - 12\alpha + 2\beta^2$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\underbrace{2\alpha^2 + 2\beta^2}_I + \underbrace{2\alpha^2 - 12\alpha}_{II}$$

$$I \Rightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2) = 2(S^2 - 2P) = 2 \times (36 + 4) = 80$$

برای به دست آوردن عبارت II کافیهست معادله درجه دوم را به صورت $x^2 - 6x = 2$ نوشته و سپس $x = \alpha$ را که یکی از ریشه‌های آن است در معادله جایگذاری کنیم:

$$\alpha^2 - 6\alpha = 2 \xrightarrow{\times 2} \underbrace{2\alpha^2 - 12\alpha}_{II} = 4$$

$$\Rightarrow I + II = 80 + 4 = 84$$

۱۰) به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = mx^2 - mx + 1$ بر محور x ها مماس و رو به بالا است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

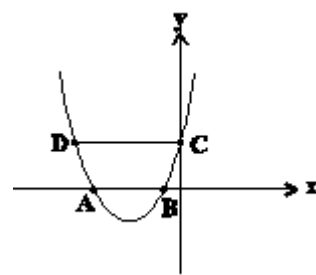
چون نمودار بر محور x ها مماس است:

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4m(1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $m = 0$ ضریب x^2 برابر صفر و تابع ثابت $y = 1$ به دست می‌آید پس $m = 4$ قابل قبول است.

۱۱) شکل زیر مربوط به سهمی $y = 3x^2 - kx + 1$ است. اگر معادله محور تقارن آن $x = -\frac{2}{3}$ باشد، مساحت ذوزنقه ABCD کدام است؟



- ۱ (۱)
- $\frac{1}{3}$ (۲)
- $\frac{2}{3}$ (۳)
- ۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{k}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow k = -4$$

$$\xrightarrow{k=-4} y = 3x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(3)(1) = 4$$

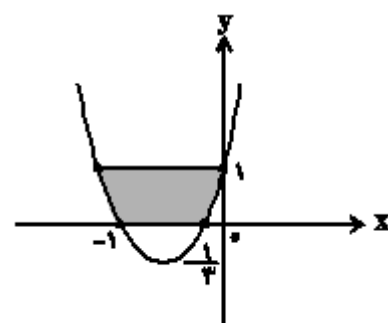
$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{-4+2}{2(3)} = -\frac{1}{3} \\ x_B = \frac{-4-2}{2(3)} = -1 \end{cases}$$

در نقطه C، $x = 0$ است، پس $y = 1$ می‌باشد. برای به دست آوردن نقطه D داریم:

$$3x^2 + 4x + 1 = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ x_D = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

(D و C نسبت به محور تقارن سهمی متقارن هستند.)



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (\text{قاعده کوچک} + \text{قاعده بزرگ}) \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \times 1 = 1$$

۱۲) تعداد جواب‌های قابل قبول برای معادله $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای حل این معادله، عبارت $x^2 - 2x$ را t در نظر گرفته و داریم:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \xrightarrow{\text{بهروش } a+c=b} \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین سه ریشه حقیقی متمایز خواهیم داشت.

۱۳) از یک رشته سیم به طول ۶۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۸۹ متر مربع بسازیم.

طول مستطیل از عرض آن چه قدر بیشتر می‌شود؟

۱۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب برابر x و y باشند، با توجه به این که محیط آن برابر ۶۰ متر است. بنابراین:

$$2(x + y) = 60 \Rightarrow x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - x$$

از طرفی مساحت مستطیل یعنی xy برابر ۱۸۹ می‌باشد. پس:

$$xy = 189 \xrightarrow{y=30-x} x(30-x) = 189$$

$$\Rightarrow x^2 - 30x + 189 = 0, \Delta = 144$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{144}}{2} \xrightarrow{x>y} x = 21, y = 30 - 21 = 9 \Rightarrow x - y = 12$$

۱۴) اگر α و β جوابهای معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 5 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2$ کدام است؟

۸ (۴)

۱۲ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$S = \alpha + \beta = 2$$

$$P = \alpha\beta = -5$$

$$\Rightarrow (\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2 + 2\beta + 1$$

$$= S^2 - 2P + 2S + 2 = 4 + 10 + 4 + 2 = 20$$

۱۵) یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 - (4a + 1)x + 4a = 0$ از ۱۰ برابر ریشه دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{9}{5}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{5}{9}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر α و β را ریشه‌های معادله بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4a + 1}{a} \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$$

$$\alpha = 10\beta - 3 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^2 = 10\alpha\beta - 3\alpha \xrightarrow{\alpha\beta=4} \alpha^2 = 40 - 3\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 40 = 0 \Rightarrow (\alpha + 8)(\alpha - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -8 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{4a + 1}{a} = \frac{-17}{2} \Rightarrow a = -\frac{2}{25} \\ \alpha = 5 \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow S = \frac{4a + 1}{a} = \frac{29}{5} \Rightarrow a = \frac{5}{9} \end{cases}$$

مقدار مثبت a

$$\xrightarrow{\text{مقدار مثبت } a} a = \frac{5}{9}$$

توجه: دلتای معادله $\Delta = 16a + 1$ است که به ازای دو مقدار بدست آمده، مثبت است..

۱۶) محدوده a کدام باشد تا نمودار تابع درجه دوم $y = (a+6)x^2 + (a-2)x + 1$ از ناحیه چهارم محورهاى مختصات عبور نکند؟

(۴) $a > 5$

(۳) $a \geq -2$

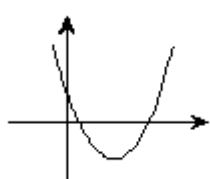
(۲) $a \leq -6$

(۱) $-6 < a < -2$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

می‌دانیم اگر $(a+6) > 0$ (ضریب x^2) معادله درجه دوم رو به بالاست. حال حالت‌هایی را که ضریب x^2 مثبت و معادله درجه دوم از ناحیه چهارم عبور کند از $a+6 > 0$ کم می‌کنیم.



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ضریب } x^2 > 0 \Rightarrow a+6 > 0 \Rightarrow a > -6 \\ b < 0 \Rightarrow a-2 < 0 \Rightarrow a < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -6 < a < 2$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 4(a+6) > 0 \Rightarrow (a^2 - 4a + 4) - 4a - 24 > 0$$

$$a^2 - 8a - 20 > 0 \Rightarrow (a-10)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 10$$

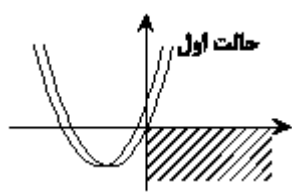
$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -6 < a < -2$$

حال اگر از $a > -6$ ، $-6 < a < -2$ را کم کنیم $a \geq -2$ به دست می‌آید.

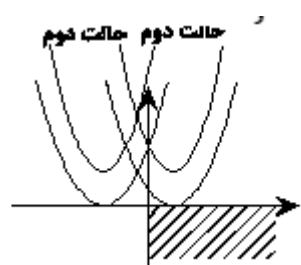
روش دوم: در حالت‌های زیر معادله درجه دوم از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

$$\text{حالت اول} \left\{ \begin{array}{l} a+6 > 0 \Rightarrow a > -6 \\ b > 0 \Rightarrow a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \\ \Delta > 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 4(a+6) > 0 \Rightarrow a > 10 \end{array} \right. \Rightarrow a > 10 \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^2 - 8a - 20 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 10 \\ a < -2 \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} (a+6) > 0 \Rightarrow a > -6 \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 - 8a - 20 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 10 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \leq a \leq 10 \quad (2)$$



$$\xrightarrow{(1), (2)} a \geq -2$$

۱۷) اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $y = x^3 - x^2 + kx + 4$ باشد، مجموع مربعات دو صفر دیگر تابع چقدر است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

چون $x = 2$ یکی از صفرهای تابع است پس به ازای آن مقدار تابع صفر می‌شود.

$$2^3 - 2^2 + k(2) + 4 = 0 \Rightarrow 8 + 2k = 0 \Rightarrow k = -4$$

برای یافتن صفرهای دیگر ضابطه تابع را بر $(x - 2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x - 2 \\ - (x^3 - 2x^2) & x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 - 4x + 4 & \\ - (x^2 - 2x) & \\ \hline -2x + 4 & \\ - (-2x + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

حال در معادله $x^2 + x - 2 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-1)^2 - 2(-2) = 5$$

توجه: ریشه‌های معادله $x^2 + x - 2 = 0$ برابر $x_1 = 1$ و $x_2 = -2$ هستند که در این صورت:

$$x_1^2 + x_2^2 = 5$$

۱۸) اگر معادله $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ دارای دو ریشه مضاعف باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با فرض $x^2 = u$ داریم: $u^2 - mu + m - 1 = 0$

معادله بر حسب u باید یک ریشه مضاعف داشته باشد تا معادله بر حسب x دارای دو ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times (1) \times (m - 1) = m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\xrightarrow{m=2} x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 (x + 1)^2 = 0$$

معادله دارای دو ریشه مضاعف $x = 1$ و $x = -1$ است.

۱۹) به ازای چند مقدار طبیعی m معادله $(m + 6)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

صفر (۱)

۲ (۲)

۵ (۳)

بی‌شمار (۴)

پاسخ: گزینه ۲

شرط اینکه تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی باشد این است که $\Delta > 0$ باشد، همچنین شرط اینکه تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد این است که $P > 0$ و $S > 0$ و باید بین نتایج حاصل از این سه شرط اشتراک بگیریم:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow \Delta = 4m^2 - 4(m + 6)(m - 3) \\ &= 4m^2 - 4m^2 - 12m + 72 = -12m + 72 > 0 \\ &\Rightarrow m < 6 \end{aligned}$$

$$P > 0 \Rightarrow P = \frac{m-3}{m+6} > 0 \Rightarrow (m < -6) \cup (3 < m)$$

$$S > 0 \Rightarrow S = \frac{2m}{m+6} > 0 \Rightarrow (m < -6) \cup (0 < m)$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{N}} 3 < m < 6 \Rightarrow m = 4, 5$$

۲۰ سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(6, 0)$ ، $(-2, 0)$ و $(-3, 6)$ می‌گذرد، مقدار a کدام است؟

(۴) $\frac{2}{15}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۳

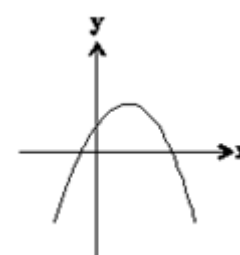
گزینه «۳»

معادله سهمی‌ای را که دو ریشه آن x_1 و x_2 باشد، می‌توان به شکل $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ نوشت، بنابراین معادله سهمی به شکل $y = a(x + 2)(x - 6)$ می‌باشد. برای محاسبه a کافی است مختصات نقطه $(-3, 6)$ را در سهمی قرار دهیم. بنابراین:

$$6 = a(-3 + 2)(-3 - 6)$$

$$6 = 9a \Rightarrow a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۲۱ در شکل زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



(۱) $c < 0$ و $b < 0$ و $a < 0$ و معادله $P(x) = 0$ دو ریشه دارد.

(۲) $c > 0$ و $b > 0$ و $a < 0$ و معادله $P(x) = 0$ ریشه ندارد.

(۳) $c > 0$ و $b < 0$ و $a > 0$ و معادله $P(x) = 0$ ریشه ندارد.

(۴) $c > 0$ و $b > 0$ و $a < 0$ و معادله $P(x) = 0$ دو ریشه دارد.

پاسخ: گزینه ۴

از آنجا که سهمی ماکزیمم دارد پس $a < 0$ و با توجه به این که سهمی محورهای را در نقطه‌ای مثبت قطع کرده است، $c > 0$ ؛ همچنین مختصات طول رأس سهمی مثبت است، پس: $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ، در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} > 0 \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b > 0$$

چون سهمی محورهای را در دو نقطه قطع کرده است پس معادله $P(x) = 0$ دو ریشه دارد.

۲۲) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بین ضرایب، رابطه $4a + c = 2b$ برقرار باشد، آن گاه یکی از ریشه‌ها همواره کدام است؟

(۴) $2 + \frac{b}{a}$

(۳) $2 - \frac{b}{a}$

(۲) ۲

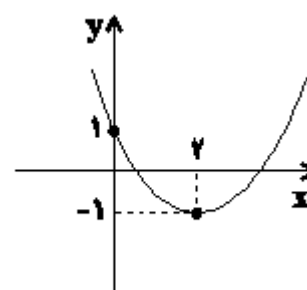
(۱) $\frac{c}{2a}$

پاسخ: گزینه ۳

اگر $x = -2$ را در معادله قرار دهیم، به رابطه $4a - 2b + c = 0$ می‌رسیم که همان رابطه صورت سؤال است؛ بنابراین یکی از ریشه‌ها $x_1 = -2$ است. ریشه دیگر را x_2 می‌نامیم:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = -2 + x_2 \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} = x_1 x_2 = -2x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{c}{2a} \end{cases}$$

۲۳) شکل زیر، نمودار یک سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲

$$P(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\left. \begin{aligned} P(2) &= 4a + 2b + 1 = -1 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \\ &\Rightarrow 2a + b = -1 \\ x_S &= -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -b = 4a \\ &\Rightarrow b = -4a \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = -4\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow a + b + c = \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

۲۴ به ازای کدام مقدار m ، معادله $(m-2)x^2 + (2m\sqrt{5m})x + m^2 - 2m = 0$ دو ریشه حقیقی معکوس هم دارد؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

اگر معادله درجه دوم، دو ریشه حقیقی معکوس داشته باشد حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با یک است. بنابراین:

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2m}{m - 2} = 1 \Rightarrow \frac{m(m-2)}{m-2} = 1 \xrightarrow{m-2 \neq 0} m = 1$$

۲۵ اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - 6 = 0$ باشند، آن‌گاه به ازای چه مقداری از k ریشه‌های معادله $3x^2 + kx + m = 0$ به صورت $\{\alpha^3\beta, \beta^3\alpha\}$ است؟

- (۱) $-\frac{147}{4}$ (۲) $\frac{441}{4}$ (۳) $\frac{147}{4}$ (۴) $-\frac{441}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به معادله $2x^2 - 5x - 6 = 0$ می‌توان گفت که:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

مجموع ریشه‌های معادله $3x^2 + kx + m = 0$ برابر $-\frac{k}{3} = -\frac{b}{a}$ است. از طرفی اگر ریشه‌های این معادله را $\alpha^3\beta$ و $\beta^3\alpha$ فرض کنیم، داریم:

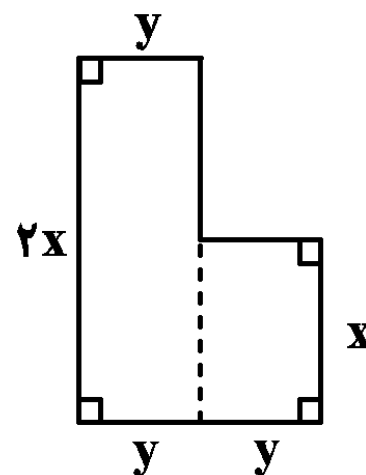
$$\alpha^3\beta + \beta^3\alpha = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \text{ : مجموع ریشه‌ها}$$

$$= \alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = -3\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(-3)\right)$$

$$= -3\left(\frac{25}{4} + 6\right) = -3\left(\frac{25+24}{4}\right) = -\frac{147}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{3} = -\frac{147}{4} \Rightarrow k = \frac{441}{4}$$

۲۶ با طنابی به طول ۴۰ متر زمینی به شکل مقابل را محصور کرده‌ایم. بیش‌ترین مساحت محصور شده ممکن کدام است؟



- (۱) ۵۰
- (۲) ۷۵
- (۳) ۱۰۰
- (۴) ۱۲۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

محیط شکل برابر است با: $4x + 4y = 40 \Rightarrow y = 10 - x$

مساحت شکل برابر است با: $S = 2xy + xy = 3xy$

$$= 3x(10 - x)$$

$$= -3x^2 + 30x$$

بیش‌ترین مقدار این عبارت درجه دوم برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ است:

$$S_{\max} = \frac{-900}{4(-3)} = 75$$

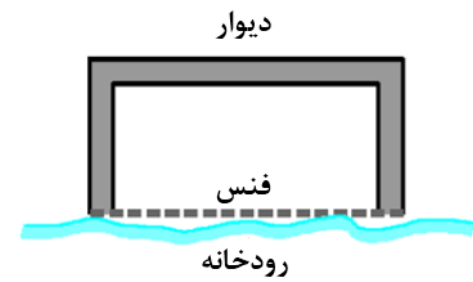
۲۷) با توجه به ضرایب معادله و علامت آنها، در مورد تعداد و علامت‌های ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - x - 1 = 0$ بحث کنید. (بدون حل معادله)

پاسخ: گزینه ۱

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

ابتدا Δ ی معادله را می‌یابیم. از آن جا که $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-1) = 13$ مثبت است، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد. از طرفی حاصلضرب ریشه‌های معادله $P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$ منفی است، پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

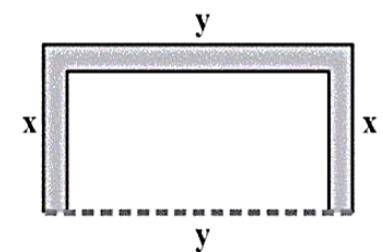
۲۸) می‌خواهیم کنار یک رودخانه تفریح‌گاهی مستطیل شکل به مساحت ۱۵۵۰ مترمربع بسازیم. قرار است یک ضلع آن فنس و سه ضلع دیگر دیوار باشد. اگر هزینه هر متر دیوار و فنس به ترتیب ۲۵ و ۶ واحد پول باشد، کمترین هزینه محصور کردن چند واحد پول است؟



- (۱) ۳۰۰۰
- (۲) ۲۹۰۰
- (۳) ۳۱۰۰
- (۴) ۳۲۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»



$$xy = 1550 \Rightarrow y = \frac{1550}{x}$$

$$(2x + y) \times 25 + 6y = 50x + 31y \quad \text{هزینه حصارکشی:}$$

$$P(x) = 50x + \frac{31 \times 1550}{x} \quad \text{هزینه حصارکشی:}$$

$$P'(x) = 50 - \frac{31 \times 1550}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{31 \times 1550}{50} \Rightarrow x = 31$$

$$P(31) = 50 \times 31 + \frac{31 \times 1550}{31} = 3100$$